Torzitatlan becslések és közelitések komplex stacionárius Gauss-Markov folyamat egy paraméterére

Arató Mátyás

A $\xi(t)$ komplex stacionárius Gauss-Markov folyamat (továbbiakban mindig feltesszük, hogy $M\,\xi(t) = 0$, $M\,\xi(t+s)\,\overline{\xi(t)} = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda|s| - i\omega s}$, ω ismert) λ "csillapodási" paraméterének becslésével részletesen foglalkoznak az [1]-[3] cikkek. Az alábbiakban elsősorban az $s_1^2 = \frac{1}{2}\left[|\xi(0)|^2 + |\xi(T)|^2\right]$ és $s_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |\xi(t)|^2\,dt$ statisztikák által külön-külön nyerhető becslésekkel történő közelitésekkel kivánok foglalkozni. Ezenkivül a maximum likelihood becslés karakterisztikus függvényének közelitéséből nyerhető egyszerüsitéssel (λ nagy értékeire), valamint a maximum likelihood becslésnek a normális eloszlással való közelitésével fogok foglalkozni jelen cikk keretein belül. A fenti feladattal foglalkozott Rochlitz Szilveszter szakdolgozatában, a szükséges számitások elvégzéséhez azonban nem volt elegendő ideje.

Meg kell jegyezni, hogy sem s_1^2 sem s_2^2 nem megengedhető becslései az ismeretlen $1/\lambda$ paraméter polinomjainak (v.ö. [4]). Az x megfigyelés $g(x)$ becslését az $f(\lambda)$ paraméter megengedhető becslésének nevezzük az Λ_0 kompakt halmazon, ha nincs olyan χ becslése a 0-nak $M_\lambda \chi = 0$, hogy $M_\lambda g(x) = f(\lambda)$ és $D_\lambda^2\,(g(x) + \chi) \leqq D_\lambda^2\, g(x)$ minden $\lambda \in \Lambda_0$ -ra és legalább egy λ értékre szigoru egyenlőtlenség teljesül.
Kiindulásként a [2]-ben levezetett s_1^2 és s_2^2 közös karakterisztikus függvényét választjuk

$$/1/ \qquad \varphi_{s_1^2, s_2^2}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4\lambda(\lambda^2 - 2i\alpha_2)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda T - T\sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2}}}{(\lambda - i\alpha_1 + \sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2})^2 - (\lambda - i\alpha_1 - \sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2})^2 e^{-2T\sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2}}}$$

A továbbiakban feltesszük, hogy $T = 1$.

<u>1. Az s_1^2 becslés, λ kis értékeire.</u> Mivel a kovariancia függvényre tett megkötések szerint $M\, s_1^2 = \frac{1}{\lambda}$ az s_1^2 statisztika használható $1/\lambda$ becslésére. Az /1/ összefüggés alapján λs_1^2 karakterisztikus függvénye

$$f_{\lambda s_1^2}(\alpha) = \frac{4}{(2 - i\alpha)^2 + \alpha^2 e^{-2\lambda}} = \frac{1}{1 - i\alpha - \alpha^2 \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4}} \; ,$$

ahonnan egyszerü számolással adódik, hogy

$$P_\lambda \left\{ \frac{1}{s_1^2} < \lambda \cdot y \right\} = P\left\{ \lambda s_1^2 > \frac{1}{y} \right\} =$$

$$= \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2(1 - e^{-\lambda})} e^{-2\frac{1 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}} \cdot \frac{1}{y}} - \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2(1 + e^{-\lambda})} e^{-2\frac{1 + e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}} \frac{1}{y}} .$$

Mivel az s_1^2 statisztika könnyen számitható λ kis értékeire, fontos megállapitani annak a λ tartománynak a határát, ahol s_1^2 jó közelitésként használható. Az alábbi kis táblázat különböző $p = P\{\text{"becslés"} \geq \lambda \cdot y\}$ értékekre adja meg y értékeit az s_1^2 becslést, valamint a maximum likelihood becslést használva $\lambda = 0$; 0.1, 0.5 értékekre. Látható, hogy $\lambda < 0.1$ esetén az s_1^2 becslés jó közelitése a maximum likelihood becslésnek, és λ = 0-ra a két becslés megegyezik.(Az 1. táblázathoz szükséges számitásokat Vizi Imréné végezte, munkájáért ezuton is köszönetemet fejezem ki.)

	$\lambda \backslash p$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
	0	9,51	19.52	39.60	99.9	1000	0.4352	0.3351	0.2620	0.2165	0.1460
m.l.	0.1	6.79	10.92	16.20	25.0	53.3	0.443	0.343	0.271	0.225	0.154
s_1^2	0.1	6.82	11.15	17.30	29.5	101.4	0.446	0.345	0.281	0.225	0.151
m.l.	0.5	4.08	5.59	7.24	9.58	16.36	0.477	0.378	0.308	0.257	0.185
s_1^2	0.5	4.52	6.86	10.17	16.72	55.2	0.482	0.380	0.314	0.254	0.173

1. táblázat

2. Az s_2^2 becslés, λ nagy értékeire

Feltevéseink szerint az s_2^2 statisztika várható értékére $M\, s_2^2 = \frac{1}{\lambda}$ adódik, igy s_2^2 az $1/\lambda$ paraméter becsléseként használható. Annak ellenére, hogy s_2^2 nem megengedhető becslés λ nagy értékeire az s_2^2 becslés egyszerübben kezelhető mint a maximum likelihood becslés. /1/-ből látható, hogy s_2^2 karakterisztikus függvénye

$$f_{s_2^2}(x) = \frac{4\lambda(\lambda^2-2i\alpha)^{\frac{1}{2}}\, e^{\lambda-\sqrt{\lambda^2-2i\alpha}}}{(\lambda+\sqrt{\lambda^2-2i\alpha})^2-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-2i\alpha})^2\, e^{-2\sqrt{\lambda^2-2i\alpha}}}$$

alaku. A $P\left\{ \lambda^2 s_2^2 < \lambda \cdot y \right\} = p$ (ahol p adott) valószinüségekhez tartozó y-értékek meghatározása egy

$$\frac{2e^{\varphi}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{r}\, e^{\lambda-\lambda\sqrt{r}\cos\psi/2}\left\{\alpha_1[\sigma\cos\gamma+s\sin\gamma]+\alpha_2[\sigma\sin\gamma-s\cos\gamma]\right\}}{(\sigma^2+s^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}\,ds$$

alaku integrál kiszámolásával történhet meg, y-ban történő iteráció segitségével. Egzakt alakban az eloszlásfüggvényt nem sikerült megkapni táblázatok segitségével. A fenti integrálban szereplő mennyiségek jelentése:

$$\alpha_1 = A_1^2 - A_2^2 + \{[A_2^2 - B_1^2] \cos(2\lambda\sqrt{r} \sin \varphi/2) +$$

$$+ 2B_1A_2 \sin(2\lambda\sqrt{r} \sin \varphi/2)\} e^{-2\lambda\sqrt{r}\cos\varphi/2},$$

$$\alpha_2 = 2A_1A_2 + \{2B_1A_2 \cos(2\lambda\sqrt{r} \sin \varphi/2) +$$

$$+ (B_1^2 - A_2^2) \sin(2\lambda\sqrt{r} \sin \varphi/2)\} e^{-2\lambda\sqrt{r}\cos\varphi/2},$$

$$\gamma = \lambda y s + \varphi/2 - \lambda\sqrt{r} \sin \varphi/2, \quad A_1 = 1 + \sqrt{r}\cos \varphi/2,$$

$$A_2 = \sqrt{r} \sin \varphi/2,$$

$$B_1 = (1 - \sqrt{r} \cdot \cos \varphi/2),$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2s}{1+2r}, \quad r^2 = 4s^2 + (1+2\sigma)^2, \quad \sigma = 1/\lambda .$$

A fenti integrál kiszámitása egyetlen y érték esetén az URAL-2 gépen $\lambda = 10$ körüli értékekre 10-15 percet vesz igénybe, $\lambda = 100$ körüli értékekre kb. 5-percet. Ellentétben a maximum likelihood becslés esetén kiszámitandó integrállal, a fenti integrál kiszámitása 10-nél kisebb λ értékekre nehezen végezhető el.

Az alábbi táblázatban megadjuk y értékeit különböző λ ,p értékekre, az s_2^2 becslés, a maximum likelihood becslés, valamint a normális eloszlással való közelités alapján.

λ \ p		0.1	0.05	0.025	0.01	0.90	0.95	0.975	0.99
	Normális közelités	1.1281	1.1645	1.1960	1.2326	0.8719	0.8355	0.8040	0.7674
100	Max. Lik.	1.1413	1.1832	1.2205	1.2654	0.8847	0.8533	0.8269	0.7972
	s_2^2	1.1305	1.1720	1.2096	1.253	0.8760	0.8449	0.8188	0.7895
	Normális közelités	1.403	1.516	1.620	1.734	0.597	0.484	0.380	0.266
10	Max. Lik	1.530	1.701	1.867	2.073	0.714	0.641	0.588	0.527
	s_2^2	1.414	1.558	1.713	2.03	0.648	0.581	0.534	0.49
	Normális közelités	-	-	-	-	-	-	-	-
5	Max. Lik.	1.809	2.090	2.354	2.710	0.647	0.562	0.497	0.432
	s_2^2					0.535	0.47		

2. táblázat

A fenti táblázat eredményei alapján megállapitható, hogy λ nagy értékeire az s_2^2 becslés jóval "szimmetrikusabban" viselkedik mint a maximum likelihood becslés, sőt még λ -nak 10 körüli értékei esetén is az s_2^2 becslésből adódó konfidencia intervallumok "rövidebbek" mint a maximum likelihood becslésből adódó konfidencia intervallumok.

3. A maximum likelihood becslés, közelités nagy λ értékekre.

a./A

$$\hat{\lambda} = \frac{-(s_1^2 - T) + \sqrt{(s_1^2 - T)^2 + 4Ts_2^2}}{2Ts_2^2}$$

maximum likelihood becslés eloszlásának meghatározásához szükség van a $\xi_y = \lambda y s_1^2 + \lambda^2 y^2 s_2^2$ statisztika eloszlására. A ξ_y változó eloszlásfüggvényének Laplace transzformáltja /1/ alapján

$$F^{*}(p) = \frac{4(1+2y^2p)^{\frac{1}{2}}\, e^{\lambda - \lambda\sqrt{1+2y^2p}}}{p\left\{[1+yp+\sqrt{1+2y^2p}\,]^2 - [1+yp-\sqrt{1+2y^2p}\,]^2 e^{-2\lambda\sqrt{1+2y^2p}}\right\}}$$

alaku. Felvetődik a kérdés, hogy λ nagy értékeire elhanyagolható-e a nevező második tagja? Ez a kérdés annál is inkább indokolt, mivel az elhanyagolás után $F^{*}(p)$ inverze egzakt formában megadható (bár nem kezelhető, v.ö. [5]). Az

$$\widetilde{F}(p) = \frac{4(1+2y^2p)^{1/2}\, e^{\lambda - \lambda\sqrt{1+2y^2p}}}{p\,[1+yp+\sqrt{1+2y^2p}\,]^2}$$

Laplace-transzformált visszatranszformáltja alapján adódó közelitő eloszlásfüggvény kiszámitását a

$$\frac{2e^{\sigma(\lambda y+1)}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{r}\, e^{\lambda(1-\sqrt{r}\cos\varphi/2)} \left\{[\sigma\cos\gamma + s\sin\gamma](A_1^2 - A_2^2) + 2A_1A_2[\sigma\sin\gamma - s\cos\gamma]\right\}}{(\sigma^2+s^2)\,[A_1^2+A_2^2]^2}\,ds$$

integrál kiszámitására vezetjük vissza, ahol

$$A_1 = (1+y\sigma + \sqrt{r}\cos \varphi/2),\quad A_2 = (ys + \sqrt{r}\sin \varphi/2),$$

$$r^2 = (1+2y^2\sigma)^2 + (2y^2 s)^2,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2y^2 s}{1+2y^2\sigma},\qquad \gamma = \{(\lambda y+1)s + \varphi/2 - \lambda\sqrt{r}\sin \varphi/2,\quad \sigma = 1/\lambda .$$

Ezen integrál kiszámitása is λ -nak 10-nél kisebb értékeire már nagyobb nehézségbe ütközik, mint a pontos képletekből adódó integráloké.

λ \ p		0.1	0.05	0.025	0.01	0.001	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
100	Valódi	1.1413	1.1832	1.2205	1.2654	1.3641	0.8847	0.8533	0.8269	0.7972	0.732
	közelités	1.1413	1.1834	1.2211	1.2654	1.362	0.8853	0.8535	0.8273	0.797	0.732
10	Valódi	1.527	1.701	1.867	2.073	2.575	0.714	0.641	0.588	0.527	0.422
	közelités	1.527	1.700	1.867	2.073	2.579	0.714	0.641	0.590	0.527	0.422
5	Valódi	1.809	2.090	2.354	2.710	3.583	0.647	0.562	0.497	0.432	0.319
	közelités	1.81	2.1	2.4	2.	3.	0.648	0.561	0.49		
3	Valódi	2.107	2.510	2.911	3.443	4.752	0.600	0.506	0.439	0.373	0.268
	közelités	2.17					0.59	0.504			

3. táblázat

A 3. táblázat eredményei alapján látható, hogy - elsősorban y-nak 1-nél kisebb értékeire - a fenti közelités még $\lambda = 3$ esetén is jól müködik. Ebben az esetben tehát használható aszimptotikus formula keresése nagyon is kivánatos lenne (éppen a fenti közelitő formula alapján).

b./ A maximum likelihood becslésnek - nagy λ értékekre - a λ várható értékü és $\sqrt{\lambda}$ szórású normális eloszlással való közelitésére a becslés nem "szimmetrikus" volta miatt a következő gyakorlati szempontból hasznos képletet adhatjuk meg.
Aszimptotikusan igaz a

$$P\{\hat{\lambda} < y\cdot\lambda\} = P\{\hat{\lambda} < \lambda + z\sqrt{\lambda}\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

összefüggés, ahol adott p szint esetén y a normális eloszlás z_p kvantilisével a következő kapcsolatban áll:

$$y_p = 1 + \frac{z_p}{\sqrt{\lambda}}$$

(Ezen összefüggés alapján számitottuk a 2. táblázat normális közelitéseit.) Mivel ez a közelités λ-nak még 100 körüli értékeire sem ad megfelelő pontosságot a [3] cikkben megadott táblázat alapján y_p-re a következő közelités adható

$$y_p = 1 + \frac{z_p}{\sqrt{\lambda}} + \frac{c_p}{\lambda}$$

Az alábbi táblázat különböző p értékekre a z_p és c_p értékeket adja meg:

p	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
z_p	-1.2815	-1.6449	-1.9600	-2.3264	-3.0900	1.2815	1.6449	1.9600	2.3264	3.0900
c_p	+1.30	1.78	2.29	2.98	4.13	1.31	1.87	2.46	3.29	5.51

4. táblázat

A normális eloszlással való közelités hibatagjának $\frac{c_p}{\sqrt{\lambda}}$ alakban történő választását indokolja, hogy λ -50-nél nagyobb értékeire a fenti közelités jó stabilitást mutat.

Irodalom

1 Arató M.-A.N.Kolmogorov-J.B.Szinaj: D.A.H. 146 /1962/ 747-750

2 Arató M.: MTA III. Oszt. Közleményei 14 /1964/, 317-330.

3 Arató M.: Теория вероятностей (sajtó alatt).

5. Arató M.: Számitástechnikai Központ Közleményei 1967. I. szám.

Summary

On unbiased estimates of the parameter λ of the complex stationary Gaussian Markovian process

We are considering the estimates s_1^2 and s_2^2 for $1/\lambda$. There are given confidence limits for λ by the help of these estimates. The estimator s_1^2 is good when λ is small and s_2^2 is good for $\lambda > 5$. By the method of numerical integration we computed the approaching distribution of the maximum likelihood estimation. The results are the same as for the exact distribution, when $\lambda > 5$.